

Введение

С развитием экономической науки и электронно-вычислительной техники все большую роль начинает играть использование математических методов в экономике, или экономико-математическое моделирование.

Любая модель представляет собой упрощенное отображение предмета, процесса или явления. Модель экономического процесса или явления, которая описывает поведение моделируемого объекта с помощью математических выражений, называется экономико-математической моделью.

Такие модели широко используются на практике для анализа и прогнозирования экономической ситуации, а также поддержки процесса принятия решений как на микро-, так и на макроуровне (на отдельных предприятиях и на рынках). Благодаря упрощению модель делает экономическую ситуацию более обозримой, но при этом совокупность данных модели должна содержать информацию, достаточную для того, чтобы судить о главных существенных чертах моделируемого объекта и принимать соответствующие решения.

В процессе производства экономико-математические модели играют вспомогательную роль, окончательное решение является прерогативой руководителя. Это связано со сложностью и недостаточной изученностью комплекса экономики, которая представляет собой сложную систему, отличающуюся целенаправленным поведением своих элементов, интересы которых могут приходиться в противоречие с интересами системы в целом.

Моделирование экономических ситуаций средствами исследования операций представляет собой один из видов экономико-математического моделирования. В широком смысле слова под исследованием операций понимают математический аппарат поддержки процесса принятия решения в различных областях человеческой деятельности.

При этом операцией называют любое мероприятие, объединенное общим замыслом и направленное к достижению определенной цели. Операция обязательно должна быть управляемой, т.е. включать как факторы среды, так и элементы решения.

Чтобы оценить операцию, необходимо определить критерий ее эффективности - показатель того, насколько результат операции соответствует ее целям (в зависимости от предпринятых действий). Чтобы исследовать операцию, строят ее математическую модель - формальные отношения, устанавливающие связь принятого критерия эффективности с объективными условиями и обстоятельствами, определяющими ход операции.

Постановка задачи линейного программирования. Постановка задачи производственного планирования

Построим математическую модель следующей экономической ситуации.

Кондитерская фабрика при производстве двух видов карамели «Снежинка» и «Яблочная» - использует три вида основного сырья: сахарный песок, патоку и фруктовое пюре. Запасы сырья составляют соответственно 800 т, 600 т и 120 т. Прибыль от реализации 1 т «Снежинки» составляет 108 ден.ед., а «Яблочной» - 140 ден.ед. На выпуск 1 т «Снежинки» расходуется 0,8 т сахара, 0,2 т патоки и 0,01 т фруктового пюре, а на выпуск 1 т «Яблочной» - соответственно по 0,5 т, 0,4 т и 0,1 т этих видов сырья.

Необходимо найти план производства карамели, который даст наибольшую прибыль.

Описанная ситуация представляет собой задачу производственного планирования (или задачу об использовании ресурсов). Чтобы построить

математическую модель данной ситуации, прежде всего введем переменные, значения которых определяют принимаемое решение. В самом деле, что в данном случае означает «план производства»? Очевидно, следует найти, сколько именно нужно выпускать продукции каждого вида.

Обозначим x_1 - производство карамели «Снежинка», т; x_2 - производство карамели «Яблочная», т.

Теперь задумаемся о цели данной операции. В данном случае целью является получение как можно более высокой общей выручки или прибыли. Каким образом можно вычислить ее через исходные данные задачи и введенные нами обозначения?

Прибыль от производства карамели «Снежинка» составит $108x_1$ ден.ед. В самом деле, если выпустить 10 т этой карамели ($x_1=10$), то прибыль от нее составит $108 \cdot 10 = 1080$ (ден.ед.), если выпустить 2 т, то $108 \cdot 2 = 216$ (ден.ед.); если вообще не выпускать эту карамель, то и прибыли от нее не будет – $108 \cdot 0 = 0$, и т.д. Аналогично прибыль от «Яблочной» составит $140x_2$ ден.ед.

Общая прибыль представляет собой сумму прибыли от двух видов карамели. Необходимо максимизировать прибыль от всей карамели, т.е. $108x_1 + 140x_2$.

Очевидно, что если бы значения переменных могли быть любыми, выручка (или прибыль) могла бы возрасти до бесконечности. Однако это не так, на выпуск продукции наложены некоторые ограничения. Прежде всего, они связаны с ограниченными запасами ресурсов.

На 1 т карамели «Снежинка» затрачивается 0,8 т сахарного песка. Следовательно, на x_1 т этой карамели будет затрачено $0,8x_1$ т (т.е. 1,6 т, если выпускается 2 т такой карамели, 80 т, если выпускается 100 т такой карамели, и т.д.). Аналогично на производство карамели «Яблочная» будет

затрачено $0,5x_2$ т сахарного песка. Таким образом, общие затраты сахарного песка составят $0,8x_1 + 0,5x_2$ т. Поскольку его запас составляет 800 т, можно записать: $0,8x_1 + 0,5x_2 \leq 800$.

Аналогично для патоки следует построить ограничение $0,2x_1 + 0,4x_2 \leq 600$, а для фруктового пюре $0,01x_1 + 0,1x_2 \leq 120$. Таким образом, построено три ограничения.

По смыслу задачи обе переменные неотрицательны: $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Итак, математическую модель можно построить следующим образом:

$$\begin{cases} \max 108x_1 + 140x_2 \\ 0,8x_1 + 0,5x_2 \leq 800 \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 \leq 600 \\ 0,01x_1 + 0,1x_2 \leq 120 \\ x_{1,2} \geq 0 \end{cases}$$

Все выражения, входящие в запись данной математической модели, представляют собой линейные функции. Построенная модель представляет собой задачу линейного программирования.

Основные понятия линейного программирования

Задача линейного программирования в общем виде может быть записана следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \\ \min \end{array} \right\} \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \\ \end{array} \right. \quad R_i \quad b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (2)$$

где $R_i \in \{\leq, \geq, =\}$;

x_j – переменные;

a_{ij}, b_i, c_j - константы;

n – число переменных;

m – число ограничений.

Распространенным является случай, когда на все переменные накладываются ограничения неотрицательности, т.е. $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$. При этом, говоря о размерности задачи (числе переменных и ограничений), ограничения на знак переменных обычно не считают.

Выражение (1) представляет собой целевую функцию задачи линейного программирования (или функцию цели), которую необходимо максимизировать или минимизировать. Например, для задачи, поставленной в предыдущем разделе, целевой функцией является выражение $(108x_1 + 140x_2)$ – именно оно отражает цель операции. Выражения (2) представляют собой систему ограничений, которая может состоять из уравнений и нестрогих неравенств. В рассмотренной задаче производственного планирования такая система состояла только из неравенств: трех ограничений по запасам ресурсов и двух ограничений неотрицательности переменных.

Любой набор значений переменных, т.е. вектор чисел $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, называется планом задачи линейного программирования. Например, для той же задачи любые два числа будут представлять собой план. План $(10; 20)$ означает, что $x_1=10$, а $x_2=20$, т.е. выпуск карамели «Снежинка» составит 10 т, а выпуск карамели «Яблочная» - 20 т. План $(2000; 1000)$ означает, что выпуск карамели «Снежинка» составит 2000 т, а выпуск карамели «Яблочная» - 1000 т. План $(0; 0)$ означает, что карамель не

будет выпускаться вообще. План (0; -10) означает, что карамель «Снежинка» не выпускается, а выпуск карамели «Яблочная» составит -10 т. Последнее, вообще говоря, очевидно бессмысленно. И т.д. Если в задаче 5 переменных, то любые 5 чисел будут представлять собой план, если 10 переменных, - то любые 10 чисел; и т.д.

План, удовлетворяющий системе ограничений, называется допустимым. Чтобы проверить, является ли план допустимым или нет, необходимо подставить его в систему ограничений. Если при этом все уравнения и неравенства истинны, то план допустимый. Если хотя бы одно ложно, то план – недопустимый.

Проверим на допустимость план (10; 20):

$$\left\{ \begin{array}{l} 0,8x_1 + 0,5x_2 = 0,8*10 + 0,5*20 = 18 \leq 800 \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 = 0,2*10 + 0,4*20 = 10 \leq 600 \\ 0,01x_1 + 0,1x_2 = 0,01*10 + 0,1*20 = 2,1 \leq 120 \\ x_1 = 10 \geq 0 \\ x_2 = 20 \geq 0 \end{array} \right.$$

Следовательно, этот план допустимый. Действительно, кондитерская фабрика может выпускать карамель таким образом. При этом будет затрачено всего 18 т сахарного песка, 10 т патоки и 2,1 т фруктового пюре, а в запасе имеется значительно больше.

Если проверить на допустимость план (0; 0), в результате будет получена система неравенств:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq 800 \\ 0 \leq 600 \\ 0 \leq 120 \\ 0 \geq 0 \\ 0 \geq 0 \end{array} \right.$$

Все эти неравенства истинны. Следовательно, и этот план допустимый. Впрочем, и без того очевидно, что кондитерская фабрика может не выпускать продукцию.

Проверим на допустимость план (2000; 1000):

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,5x_2 = 0,8*2000 + 0,5*1000 = 2100 \leq 800 \\ 0,2x_1 + 0,4x_2 = 0,2*2000 + 0,4*1000 = 800 \leq 600 \\ 0,01x_1 + 0,1x_2 = 0,01*2000 + 0,1*1000 = 120 \leq 120 \\ x_1 = 2000 \geq 0 \\ x_2 = 1000 \geq 0 \end{cases}$$

Первые два утверждения – ложные. На самом деле, $2100 > 800$, а $800 > 600$. Следовательно, этот план недопустимый (вообще говоря, убедившись, что первое неравенство – ложное, можно было выполнение остальных и не проверять). Итак, мы убедились, что фабрика не может выпускать карамель таким образом, так как ей не хватит для этого сахарного песка и патоки.

Если подставить в систему ограничений план (0; -10), то все они выполняются, кроме последнего ограничения: $-10 < 0$. Следовательно, раз хотя бы одно ограничение не выполняется, и этот план недопустимый (выпустить -10 т карамели невозможно).

Вся совокупность допустимых планов представляет собой область допустимых планов (ОДП) задачи.

Допустимый план, на котором достигается максимальное или минимальное значение целевой функции, называется оптимальным планом, а само это значение - оптимумом задачи.

Для рассмотренной задачи оптимальным планом будет такой допустимый план производства карамели, который позволит получить

наибольшую прибыль. Сама эта величина прибыли – самая высокая, какую только можно получить, - будет представлять собой оптимум.

Следует отметить, что оптимальных планов в задаче может быть более одного, но значение целевой функции на них должно быть одинаковым, т.е. оптимум всегда один. Например, в задаче производственного планирования иногда можно найти разные способы произвести продукцию таким образом, чтобы прибыль (или выручка) были максимальными. Но все они дадут одну и ту же – максимальную – величину прибыли.

Таким образом, с точки зрения изучаемой дисциплины употребление таких словосочетаний, как «самый оптимальный» или «наиболее оптимальный», является неграмотным. Слово «оптимальный» не сочетается со словами «самый», «наиболее», «очень» и т.п., как любое прилагательное в превосходной степени (нельзя сказать «самый наилучший»). На самом деле, такое выражение просто бессмысленно – ведь если некоторый план действий – «самый оптимальный», значит, есть и другие оптимальные планы, «менее оптимальные», чем он. Но раз они чем-то хуже, значит, они оптимальными не являются.

Можно доказать, что если оптимальный план существует, то он либо единственный, либо их бесконечно много^{*}; любая смесь (взвешенная сумма) оптимальных планов является оптимальным планом.

Решить задачу линейного программирования означает найти все ее оптимальные планы и оптимум, хотя часто ограничиваются нахождением одного из возможных решений. Если задача линейного программирования не

^{*} За исключением задач, в которых переменные могут принимать только целые значения.

имеет решений, необходимо установить причину ее неразрешимости. Это может быть одна из двух причин:

- ее ОДП пуста (т.е. система ограничений несовместна),
- целевая функция не ограничена на ОДП (т.е. ее значение можно увеличивать или уменьшать до бесконечности).

Задачи линейного программирования, как экономико-математические модели, находят очень широкое применение. Рассмотренная выше задача производственного планирования представляет собой лишь одну из возможных экономических интерпретаций задачи линейного программирования, наиболее традиционную. Множество других экономических ситуаций может быть описано в тех же математических терминах, что делает возможным применение к их решению одного и того же математического аппарата.

Для того чтобы построить математическую модель экономической ситуации в виде задачи линейного программирования, прежде всего необходимо ввести переменные задачи. Они должны быть введены таким образом, чтобы их значения определяли принимаемое решение (получив значения переменных, мы получаем ответ на поставленный вопрос).

Затем определяют цель, критерий эффективности операции, ту величину, которую необходимо экстремизировать в задаче. Ее выражают через введенные переменные - получают линейное выражение для целевой функции.

После этого необходимо установить, чем ограничивается рост или уменьшение целевой функции, т.е. определить ограничения задачи. Их нужно также выразить через переменные и записать в виде системы уравнений и неравенств.

Кроме того, при построении модели полезно воспользоваться следующими рекомендациями. При определении переменных следует

заранее обдумать, позволят ли они отразить в модели все условия задачи (если известно, что нет избыточных условий). В конкретной задаче указывают единицы измерения для переменных. Если в исходных данных задачи одна и та же величина измеряется в различных единицах (например, масса в граммах, килограммах, тоннах), то необходимо перевести эти данные в одни и те же единицы измерения. Выражая целевую функцию и ограничения через переменные, следует проверить, какими единицами будут измеряться полученные величины и не являются ли они бессмысленными с экономической точки зрения (например, не измеряются ли левая и правая части ограничений в разных единицах). Отдельно следует обдумать ограничения на знак переменных.

В некоторых задачах переменные могут принимать только целые значения. Этот факт также необходимо записать в виде ограничения: $X \in Z$. Такое ограничение выводит поставленную задачу из класса задач линейного программирования в класс задач целочисленного линейного программирования. Однако, рассмотренных здесь понятий достаточно для того, чтобы построить математическую модель и для целочисленной задачи.

Приведем некоторые примеры экономических задач, математические модели которых можно построить в виде задач линейного программирования. Следует отметить, что здесь будут рассмотрены далеко не все такие задачи; а кроме того, даже те, что рассмотрены, существуют в разнообразных модификациях, и классификация этих задач в большой мере условна, различается у разных авторов.

Студентам предлагается самостоятельно изучить примеры постановки задачи о диете (о составлении рациона, о смеси), задачи о раскрое материалов, задачи о загрузке транспорта и др.